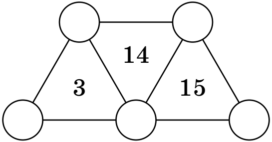
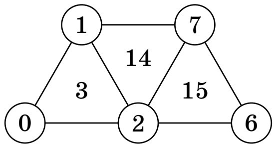
7 класс

Задача 1. Ваня расставил в кружках различные цифры, а внутри каждого треугольника записал либо сумму, либо произведение цифр в его вершинах. Потом он стёр цифры в кружочках. Впишите в кружочки различные цифры так, чтобы условие выполнялось. **[*4 балла*]** **(*В. А. Клепцын*)**



Ответ.



Комментарий. Найти этот ответ и заодно доказать его единственность можно так. Число 3 не может быть получено как произведение трёх различных чисел, значит, оно получено как сумма $0+1+2$. Тогда число 14 уже не может быть получено как сумма: две «общие» с числом 3 цифры в сумме дадут максимум 3, и ещё одной цифры, чтобы набрать 14, не хватит. Значит, 14 получено как произведение: $1 \cdot 2 \cdot 7$.

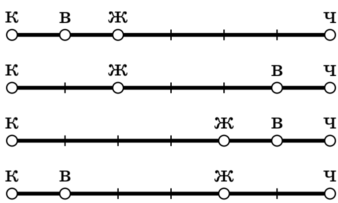
Тогда число 15 получено с использованием 7 и 1 или 7 и 2 — в частности, получено как сумма. Вариант 7 и 1 невозможен: третьей цифрой должна быть $15-1-7=7$, а она уже использована. Значит, 15 составлено как $2+7+6$.

Задача 2. Доктор Айболит хочет навестить и корову, и волчицу, и жучка, и червячка. Все четверо живут вдоль одной прямой дороги. Орлы готовы утром доставить Айболита к первому пациенту, а вечером забрать от последнего, но три промежуточных перехода ему придётся сделать пешком. Если Айболит начнёт с коровы, то длина его кратчайшего маршрута составит 6 км, если с волчицы — 7 км, а если с жучка — 8 км.

Нарисуйте, как могли располагаться домики коровы, волчицы, жучка и червячка (достаточно одного примера расположения). **[*4 балла*]**

(*И. В. Ященко, И. В. Раскина*)

Ответ. На рисунке показаны 4 возможных варианта (на отрезке разметка по 1 км; мы рисуем схему так, что корова левее червячка):



Комментарий. Куда бы ни доставили орлы Айболита, ему нужно посетить два крайних домика. Значит, любой его маршрут не меньше, чем расстояние между ними, а маршрут с началом в одном из крайних домиков как раз равен расстоянию между крайними домиками.

То есть это расстояние является наименьшим и должно быть одинаковым для двух животных. Следовательно, оно равно 6 км, и корова и червячок живут в крайних домиках, а волчица и жучок — где-то между ними. Остаётся заметить, что поскольку маршрут Айболита с началом в домике волчицы занимает 7 км, волчица живёт в 1 км от любого из крайних домиков, а жучок, аналогично, в 2 км.

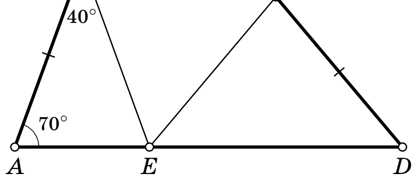
Задача 3. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

Задача 4. См. задачу 4 для 6 класса (с. 4).

Задача 5. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, $\angle A = 70^\circ$ и $\angle B = 100^\circ$. Чему могут быть равны углы C и D? **[*8 баллов*]** (*М. А. Волчкевич*)

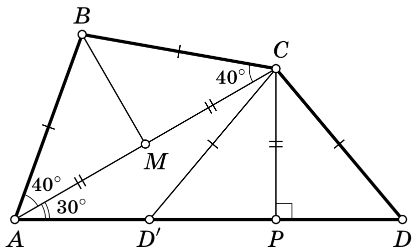
Ответ. 60° и 130° или 140° и 50°.

Первое решение. Проведём отрезок BE так, что точка E лежит на AD, а угол ABE равен 40°. Тогда $\angle AEB = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ$, следовательно, треугольник ABE равнобедренный, $AB = BE$. Рассмотрим треугольник BCE: $\angle CBE = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$ и $BE = AB = BC$, значит, треугольник BCE равносторонний, и $CE = BC = AB$. А это означает, что четырёхугольник $ABCE$ подходит под условие, и один из возможных ответов — угол C такого четырёхугольника равен 60°, и оставшийся угол равен $\angle AEB + \angle BEC = 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ$.



Заметим, что для любой точки D' на отрезке AE справедливо $CD' > CE = BC$ (так как CD' — наибольшая сторона в тупоугольном треугольнике CED'). Пусть точка D лежит на луче AE за точкой E, $CD = BC = CE$. Тогда $\angle CED = 180^\circ - \angle AEB - \angle BEC = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$, и, поскольку $CE = CD$, $\angle CDE = \angle CED = 50^\circ$, а значит, $\angle ECD = 180^\circ - 2\cdot 50^\circ = 80^\circ$ и $\angle BCD = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$.

Второе решение. В равнобедренном треугольнике ABC угол ABC равен 100°, значит, $\angle BAC = \angle ACB = 40^\circ$, и тогда $\angle CAD = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$. Отметим середину M отрезка AC и основание P перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD. Тогда в прямоугольном треугольнике ACP против угла в 30° лежит катет CP, значит, $CP = \frac{1}{2}AC = CM$. Следовательно, прямоугольные треугольники BCM и DCP равны по катету и гипотенузе, значит, $\angle CDP = \angle MBC = 50^\circ$, т.е. в зависимости от того, лежит точка P внутри отрезка AD или снаружи, либо угол ADC, либо смежный с ним равен 50°. Соответственно, в первом случае $\angle ADC = 50^\circ$ и $\angle BCD = 140^\circ$, а во втором случае $\angle AD'C = 130^\circ$ и $\angle BCD' = 60^\circ$.



Задача 6. См. задачу 6 для 6 класса (с. 6).